第四章　随机变量的数字特征

1. 设随机变量 $X_1, X_2, \ldots, X_n (n \geq 1)$ 独立同分布, 且方差为 $D(X_i) = \sigma^2 > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 令 $Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 则 (　　).

(A) $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \frac{\sigma^2}{n}$

(B) $\mathrm{Cov}(X_1, Y) = \sigma^2$

(C) $D(X_1 + Y) = \frac{n+2}{n}\sigma^2$

(D) $D(X_1 - Y) = \frac{n+1}{n}\sigma^2$

2. 设 X_1, X_2, X_3 相互独立同服从参数 $\lambda = 3$ 的泊松分布, $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$, 则 $E(Y^2) =$ (　　).

(A) 1　**(B)** 6　**(C)** 9　**(D)** 10

3. 设 X 与 Y 为两个随机变量, 且它们的相关系数 $\rho_{XY} = 0$, 则成立的是 (　　).

(A) X 与 Y 一定独立

(B) X 与 Y 不相关

(C) X 与 Y 独立且不相关

(D) X 与 Y 仅不相关, 但不独立

4. 设 (X, Y) 为二维随机变量, 且 $D(X) > 0, D(Y) > 0$, 则下列等式成立的是 (　　).

(A) $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

(B) $\mathrm{Cov}(X, Y) = \rho_{\mathrm{XY}} \cdot \sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}$

(C) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$

(D) $\mathrm{Cov}(2X, 2Y) = 2\mathrm{Cov}(X, Y)$

5. 设随机变量 X 的数学期望存在, 则 $E(E(E(X))) =$ (　　).

(A) 0　**(B)** $E(X)$　**(C)** $D(X)$　**(D)** $[E(X)]^2$

6. 设 $X \sim N(0, 1)$, $Y \sim N(1, 1)$, 且 X 与 Y 相互独立, 则下列结论正确的是 (　　).

(A) $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$

(B) $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

(C) $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$

(D) $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

7. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda(\lambda > 0)$ 指数分布, 则 $\frac{D(X)}{E(X)} =$ (　　).

(A) 1　**(B)** λ　**(C)** $\frac{1}{\lambda}$　**(D)** λ^2

8. 设随机变量 X 与 Y 的相关系数为 0.5, $E(X)=E(Y)=0$, $E(X^2)=E(Y^2)=2$, 则 $E[(X+Y)^2]=$____________.

9. 若 $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$, $i=1,2,\cdots,n$, 且 X_i 相互独立, 则 $X=c_1X_1+c_2X_2+\cdots+c_nX_n$ 服从____________分布, 且 $D(X)=$____________.

10. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且方差分别为 6 和 3, 则 $D(2X-Y+4)=$____________.

11. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B\left(16,\dfrac{1}{2}\right)$, Y 服从于参数为 9 的泊松分布, 则 $D(X-2Y+1)=$____________.

12. 设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2(>0)$, 则 $P\{|X-\mu|\geq 3\sigma\}\leq$____________.

13. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $D(X)=4$, $D(Y)=2$ 则 $D(3X-2Y+4)=$____________.

14. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且方差分别为 6 和 3, 则 $D(2X-Y+4)=$____________.

15. 设二维离散型随机变量 (X,Y) 的概率分布如图所示, 试求:

(1) 分别关于 X、Y 的边缘概率分布, 并判断 X 与 Y 的独立性;

(2) 协方差 $\operatorname{cov}(X,Y)$;

(3) 概率 $P\{X>Y\}$;

(4) 在 $X=0$ 的条件下 Y 的条件分布律;

(5) 随机变量 $Z=X^2Y$ 的概率分布.

$X \backslash Y$	-1	0	3
-2	1/15	2/15	0
0	2/15	3/15	4/15
1	0	1/15	2/15

16. 掷一枚均匀的骰子两次, 设 X 表示出现的点数之和, Y 表示第一次出现的点数减去第二次出现的点数. 试求:

(1) $D(X)$, $D(Y)$;

(2) X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY};

(3) 问 X 与 Y 是否独立?

17. 设随机变量 $X=\begin{cases}1, & 若\ A\ 发生\\ 0, & 若\ A\ 不发生\end{cases}$，$Y=\begin{cases}1, & 若\ B\ 发生\\ 0, & 若\ B\ 不发生\end{cases}$，其中随机事件 A 和 B 相互独立，且 $P(A)=P(B)=p(0<p<1)$. 求二维随机变量 (X,Y) 的联合分布律，并说明 X 与 Y 的线性相关性.

18. 设 $U=aX+b, V=cY+d$，其中 $a>0, c>0$，证明：随机变量 U 与 V 的相关系数 ρ_{UV} 等于随机变量 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}，即 $\rho_{UV}=\rho_{XY}$.

19. 设随机变量 (X,Y) 的分布律为：

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$
0	$1/8$	0	$1/8$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$

验证：X 和 Y 是不相关的，但 X 和 Y 不是相互独立的.