第七章　参数估计

1. 设 $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ 是参数 θ 的两个相互独立的无偏估计, 且 $D(\widehat{\theta}_1) = 2D(\widehat{\theta}_2) > 0$, 若 $\widehat{\theta} = k_1\widehat{\theta}_1 + k_2\widehat{\theta}_2$ 也是 θ 的无偏估计量, 则下列四个估计量中方差最小的是 (　　).

(A) $\frac{1}{2}\widehat{\theta}_1 + \frac{1}{2}\widehat{\theta}_2$　　**(B)** $\frac{2}{3}\widehat{\theta}_1 + \frac{1}{3}\widehat{\theta}_2$　　**(C)** $\frac{1}{3}\widehat{\theta}_1 + \frac{2}{3}\widehat{\theta}_2$　　**(D)** $\frac{1}{4}\widehat{\theta}_1 + \frac{3}{4}\widehat{\theta}_2$

2. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 未知, 而 μ 为未知参数, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为样本, 记 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, 则 $\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1)\right)$ 为 μ 的区间, 其置信水平为 (　　).

(A) 0.90　　**(B)** 0.95　　**(C)** 0.975　　**(D)** 0.05

3. 设总体 $X \sim B(m, p)$, 其中 $p\ (0 < p < 1)$ 为未知参数, 从总体 X 中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \ldots, X_n$, 记 p 的矩量估计为 $\widehat{p}$, 则 $E\left[\widehat{p}\right] =$____________.

4. 设总体 $X \sim N(\mu, 1)$, x_1, x_2 为来自总体 X 的一个样本, 估计量 $\widehat{\mu}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2$, $\widehat{\mu}_2 = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2$, 则方差较小的估计量是____________.

5. 设 $\widehat{\theta}_1$, $\widehat{\theta}_2$ 是参数 θ 的两个无偏估计, 如果 $\widehat{\theta}_1$ 比 $\widehat{\theta}_2$ 更有效, 则 $D(\widehat{\theta}_1)$ 和 $D(\widehat{\theta}_2)$ 的大小关系是____________.

6. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ 的一个样本, 且 $C\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$ 是参数 σ^2 的无偏估计量, 则常数 $C =$____________.

7. 已知来自容量为 $n = 49$ 的正态总体 $N(\mu, 7.3^2)$ 的一个样本, 其样本均值 $\overline{x} = 28.8$, 则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是____________.

8. 设总体 X 的概率密度函数为: $f(x;\beta) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{x^{\beta+1}}, & x > 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 其中 $\beta > 1$ 为未知参数, 又 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的容量 n 的简单随机样本, 试求:

(1)参数 β 的矩估计量;

(2)参数 β 的极大似然估计量.

9. 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},$$

其中 $\theta>0$ 是未知参数. $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的容量 n 的简单随机样本, 试求:

(1) θ 的矩估计量;

(2) θ 的极大似然估计量.

10. 设总体 X 服从指数分布, 其概率密度函数 $f(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$, 其中 $\lambda>0$, 是未知参数. $x_1,x_2\cdots,x_n$ 是来自总体 X 的一组样本观测值, 求参数 λ 的最大似然估计值.

11. 设某行业的一项经济指标服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ,σ 均未知. 今获取了该指标的 20 个数据作为样本, 并算得样本均值 $\overline{x}=56.93$, 样本方差 $s^2=(0.93)^2$. 试求:

(1)该项经济指标标准差 σ 的置信水平为 98% 置信区间;

(2)该项经济指标均值 μ 的置信水平为 95% 的（单侧）置信下限.

($\chi^2_{0.01}(19)=36.19$, $\chi^2_{0.99}(19)=7.63$, $t_{0.05}(19)=1.729$, $t_{0.025}(19)=2.093$)

12. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad(\theta>0)$$

$X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本,

(1)求参数 θ 的矩估计;

(2)求参数 θ 的极大似然估计.

13. 某校大二学生线性代数考试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$, 从中随机地抽取 20 份考卷, 算得平均成绩 $\overline{x}=72$ 分, 样本方差 $s^2=16$ 分, 试求:

(1)学生线性代数考试成绩标准差 σ 的置信水平为 98% 置信区间;

(2)学生线性代数成绩均值 μ 的置信水平为 95% 的（单侧）置信上限.

($\chi^2_{0.01}(19)=36.19$, $\chi^2_{0.99}(19)=7.63$, $t_{0.05}(19)=1.729$, $t_{0.025}(19)=2.093$)

14. 设总体 X 具有概率密度

$$f(x;\theta)=\begin{cases}(\theta+1)x^{\theta} & 0<x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\ (\theta>-1),$$

$X_1, X_2\cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，

(1)求参数 θ 的矩估计;

(2)求参数 θ 的极大似然估计.

15. 某校大二学生概率统计成绩 X 服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$, 从中随机地抽取 25 位考生的成绩，算得平均成绩 $\overline{x}=72.2$ 分，样本标准差 $s=18$ 分，试求:

(1)学生概率统计成绩标准差 σ 的置信水平为 95% 置信区间;

(2)学生概率统计成绩均值 μ 的置信水平为 95% 的（单侧）置信上限.

($\chi^2_{0.025}(24)=39.36$, $\chi^2_{0.05}(24)=36.42$, $\chi^2_{0.975}(24)=12.40$, $\chi^2_{0.95}(24)=13.85$, $t_{0.05}(24)=1.71$, $t_{0.025}(24)=2.06$)

16. 设总体 X 具有概率密度 $f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\ (\theta>0)$,

(1)求参数 θ 的矩估计；

(2)求参数 θ 的极大似然估计.