第三章　导数、微分、边际与弹性

1. 设 $Q=f(p)$ 为需求函数, 其中 p 为价格 (单位: 元 / 吨), Q 为需求量 (单位: 吨). 若价格为 100 元 / 吨时的需求弹性为 $\eta(100)=-\dfrac{100}{f(100)}\cdot f'(100)=0.25$, 则当价格调整为 101 元 / 吨时, 需求量将约 (　) .

(A) 增加 25%　　**(B)** 增加 0.25%　　**(C)** 减少 25%　　**(D)** 减少 0.25%

2. 函数 $y=|\sin x|$ 在 $x=0$ 处是 (　) .

(A) 无定义　　**(B)** 有定义，但不连续

(C) 连续但不可导　　**(D)** 连续且可导

3. 设 $y=x+\sin x$, $\mathrm{d}y$ 是 y 在 $x=0$ 点的微分，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 (　) .

(A) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是等价无穷小

(B) $\mathrm{d}y$ 与 Δx 相比是同阶 (非等价) 无穷小

(C) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 高阶的无穷小

(D) $\mathrm{d}y$ 是比 Δx 低阶的无穷小

4. 设函数 $y=(1+\cos x)^{\arcsin x}$, 则微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ (　) .

(A) $-2\,\mathrm{d}x$　　**(B)** $-\ln 2\,\mathrm{d}x$　　**(C)** $2\,\mathrm{d}x$　　**(D)** $\ln 2\,\mathrm{d}x$

5. 设需求函数 $Q=3000\mathrm{e}^{-0.125p}$, 则当价格 $p=10$, 且上涨 1% 时，需求量 Q 约 (　) .

(A) 减少 1.25%　　**(B)** 增加 1.25%　　**(C)** 减少 125%　　**(D)** 增加 125%

6. 设函数 $f(x)=\sin 2x+3^x$, 则导数值 $f'(0)=$ (　) .

(A) $\ln 3-2$　　**(B)** $\ln 3+2$　　**(C)** 1　　**(D)** $\ln 3+1$

7. 设 $f(x)=3^x+x^2+\ln 3$, 则 $f'(1)$ 等于 (　) .

(A) $3\ln 3$　　**(B)** $\dfrac{1}{3}$　　**(C)** $\dfrac{3}{\ln 3}+2$　　**(D)** $3\ln 3+2$

8. 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+1)-f(1-x)}{x}=$ (　　)．

(A) $f'(1)$　　(B) $2f'(1)$　　(C) 0　　(D) $f'(2)$

9. 某需求函数为 $Q=-100P+3000$，那么当 $P=20$ 时需求的价格弹性 $E_d=$ (　　)．

(A) 2　　(B) 1000　　(C) -100　　(D) -2

10. 设 $f(x)=2^x+\ln 2$, 则 $f'(1)$ 等于 (　　)．

(A) $2\ln 2$;　　(B) $2\ln 2+\dfrac{1}{2}$;　　(C) $\dfrac{2}{\ln 2}$;　　(D) $\dfrac{2}{2\ln 2}+\dfrac{1}{2}$.

11. 设函数 $f(x)=(1+\cos x)^{\frac{1}{x}}$, $\mathrm{d}y|_{x=\frac{\pi}{2}}=$ ____________.

12. 设 $\begin{cases} x=f'(t) \\ y=tf'(t)-f(t) \end{cases}$,其中 $f(t)$ 具有二阶导数,且 $f''(t)\neq 0$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ____________.

13. 设函数 $f(x)=x(\sin x)^{\cos x}$, 则 $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ____________.

14. 设商品的需求函数为 $Q=100-5P$, 其中 Q,P 分别表示需求量和价格. 如果商品需求弹性的绝对值大于 1, 则商品的价格的取值范围是____________.

15. 设曲线 $f(x)=x^n, n\in N$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与 x 轴相交于 $(\xi_n,0)$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)$ $=$ ____________.

16. 由参数方程 $\begin{cases} x=2\cos t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ 所确定的曲线在 $t=\dfrac{\pi}{4}$ 处的切线方程是____________.

17. 设 $y=f(\sqrt{x})f^2(x)+f(\mathrm{e})$, 其中 $f(x)$ 在 R 上可导，则 $y'=$ ____________.

18. 设函数 $y=x\mathrm{e}^x$, 对正整数 n, n 阶导数 $y^{(n)}=$ ____________.

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{2}{x}}{\arcsin x}=$ ____________.

20. 某商品的需求函数为 $Q=400-100P$, 则 $P=2$ 时的需求弹性为 ____________.

21. 为使函数 $f(x)=(1-x)^{\frac{2}{x}}$ 在点 $x=0$ 处连续, 应定义 $f(0)=$ ____________.

22. 设函数 $y=\dfrac{x}{\ln x}$, 则导数 $y'=$____________.

23. 曲线 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right) \\ y=\arctan t \end{cases}$ 在 $t=1$ 的对应点处的切线方程是____________.

24. 设 $y=(1+\sin x)^x$, 则 $y'\big|_{x=\pi}=$____________.

25. 已知某商品的需求函数为 $Q=16-\frac{P}{3}$(P 为价格, Q 为需求量), 当价格 $P=8$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降约____________.

26. 曲线 $y+xe^y=1$ 在点 $P(0,1)$ 处的切线方程是____________.

27. 已知某商品的需求函数为 $Q=3000-100P$,（P 为价格,Q 为需求量）, 当价格 $P=20$ 时, 若价格上涨 1%, 则需求量将下降____________.

28. 设函数 $f(x)=xe^x$, 对正整数 n, 则 $f^{(n)}(0)=$____________.

29. 设函数 $y=\dfrac{x\sin x}{1+x}$, 则微分 $\mathrm{d}y=$____________.

30. 曲线 $y=xe^x$ 在点 $(0,0)$ 处切线的方程是____________.

31. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是____________.

32. 设生产某产品 Q 单位的总成本为 $C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$, 则生产 1800 个单位产品时的边际成本是____________.

33. 曲线 $y=xe^x$ 在拐点处切线的斜率是____________.

34. 设某种商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为 $R(Q)=104Q-0.4Q^2$, 则销售量 Q 为 50 个单位时总收益的边际收入是____________.

35. 设 $f(x)$ 是可导函数, 求函数 $y=f(\tan x)\cdot\arcsin[f(x)]+e^2$ 的导数.

36. 求由方程 $y^5+2y=x+3x^7$ 所确定的隐函数 $y(x)$ 在点 $(0,0)$ 处的切线方程并求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

37. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$，其中 $\varphi(t)$ 具有连续的二阶导数，且 $\varphi(0)=1$．

(1) 确定 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并求 $f'(x)$；

(2) 讨论 $f'(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性．

38. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ k^2, & x=0;\\ kx\mathrm{e}^x+1, & x>0.\end{cases}$ 试分析在点 $x=0$ 处，

(1) k 为何值时，$f(x)$ 有极限；

(2) k 为何值时，$f(x)$ 连续；

(3) k 为何值时，$f(x)$ 可导．

39. 求由参数方程 $\begin{cases}x=\ln\sqrt{1+t^2}\\ y=\arctan t\end{cases}$，所确定的函数的一阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 及二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$．

40. 求由方程 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 所确定的隐函数 y 在 $x=0$ 处的导数 $y'(0)$．

41. 已知 $y=x\ln x$，求 $y^{(n)}$．

42. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sin\left(x^2\right), & x\leq 0\\ \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}, & x>0\end{cases}$，求 $f'(x)$．

43. 设 $f(x)=\begin{cases}b(1+\sin x)+a+2, & x>0\\ \mathrm{e}^{ax}-1, & x\leq 0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，求 a,b 及 $f'(x)$．

44. 已知函数 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=\cos 2t\end{cases}$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}$．

45. 设 $y=\cos\left(f^2(x)\right)+f(\sin 1)$，其中 $f(x)$ 可微，求 $\mathrm{d}y$．

46. 求曲线 $y^3=(x^2+1)^{\sin x}$ 上 $x=0$ 处的切线方程．

47. 设函数 $y=f\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)+\big(f(\sin x)\big)^3$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数, 求 $\mathrm{d}y$.

48. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy-\mathrm{e}^x=0$ 确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $y''(0)$.

49. 设函数 $y=f(\sin x)+\cos\big(f(x)\big)$, 其中 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有一阶导数与二阶导数, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

50. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\arctan t \\ y=\ln(1+t^2) \end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

51. 设 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x<0 \\ \mathrm{e}^x, & x\ge 0 \end{cases}$, 确定 a,b 的值使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

52. 已知函数 $y=x[\sin(\ln x)+\cos(\ln x)]$, 试求 $\mathrm{d}y$.

53. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2y-\mathrm{e}^{2x}=\sin y$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

54. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=1-t^2 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 所确定, 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

55. 设函数 $y=(x^2+1)^3(x+2)^2x^6$, 试求 y'.

56. 已知函数 $y=\arctan \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, 试求 $\mathrm{d}y$.

57. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x+y)=y$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

58. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=t-\ln(1+t) \\ y=t^3+t^2 \end{cases}$ 所确定，试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

59. 确定 a,b 的值，使得函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x\ge 0 \\ ax+b, & x<0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导.

60. 已知函数 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, 试求 $\mathrm{d}y$.

61. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $x-y+\frac{1}{2}\sin y=0$ 所确定, 计求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

62. 设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\ln\left(1+t^2\right), \\ y=t-\arctan t, \end{cases}$ 所确定, 试求 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

63. 设函数 $y=\frac{(2x+1)^2\sqrt[3]{3x-2}}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$, 试求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

64. 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, 对任意的实数 x_1,x_2, 有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)f(x_2),$$

且 $f(0)\neq 0,\quad f'(0)=1$, 证明: $\quad f'(x)=f(x)$.